«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки

В.А. Болотов
«__» _____ 2006 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель Научно-методического совета ФИПИ по математике

Г.Г. Канторович
«30» октября 2006 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант КИМ 2007 г.

подготовлен Федеральным государственным научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Директор ФИПИ **А.Г.Ершов**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту

При ознакомлении с Демонстрационным вариантом 2007 года следует иметь в виду, что задания, включенные в демонстрационный вариант, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2007 году. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2007 года, приведен в кодификаторе, помещенном на сайтах www.ege.edu.ru и www.fipi.ru .

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, числе, форме, уровне сложности заданий: базовом, повышенном и высоком. Приведенные критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом (тип «С»), включенные в этот вариант, позволят составить представление о требованиях к полноте и правильности записи развернутого ответа.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки и сдачи ЕГЭ в соответствии с целями, которые они ставят перед собой.

Для правильной распечатки файла демонстрационного варианта по математике необходимо установить на компьютере программное обеспечение MathType версии не ниже 5.0 (см. Примечание в конце файла).

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант 2007 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (A1 – A10, B1 – B3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. К каждому заданию A1 – A10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям B1 – B3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (B4 – B11, C1, C2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям B4 – B11 надо дать краткий ответ, к заданиям C1 и C2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (C3, C5) и одно – геометрическое (C4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (B9, B10, B11, C4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий вы сможете вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1 Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.

1) 1 2) 2 3) 32 4) 4

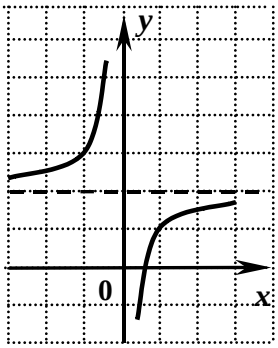
А2 Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

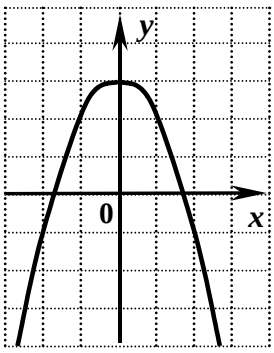
1) 1,2 2) $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$ 3) 2,4 4) $\sqrt[3]{2}$

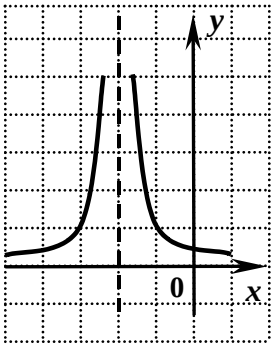
А3 Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3{,}5$.

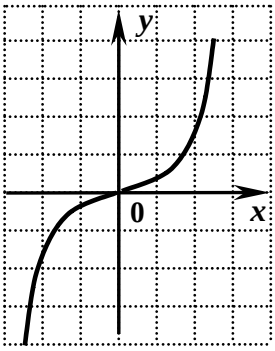
1) – 6,5 2) – 0,5 3) – 10,5 4) – 67,5

А4 На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

1) 

2) 

3) 

4) 

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

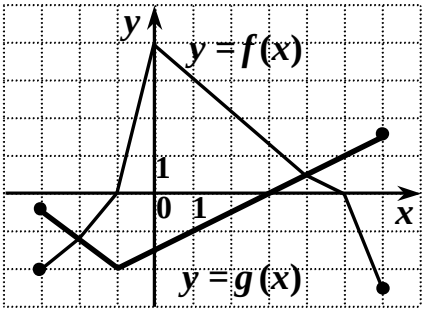
A5 Найдите производную функции $y=(x-3)\cos x$.

1) $y'=\cos x+(x-3)\sin x$
2) $y'=(x-3)\sin x-\cos x$
3) $y'=\cos x-(x-3)\sin x$
4) $y'=-\sin x$

A6 Укажите множество значений функции $y=2^x+5$.

1) $(5;\ +\infty)$ 2) $(0;\ +\infty)$ 3) $(-\infty;\ +\infty)$ 4) $(7;\ +\infty)$

A7 На рисунке изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке $[-3;\ 6]$. Укажите множество всех значений x, для которых выполняется неравенство $f(x)\geq g(x)$.



1) $[-1;\ 5]$
2) $[-3;\ -2]\cup[4;\ 6]$
3) $[-3;\ -1]\cup[5;\ 6]$
4) $[-2;\ 4]$

A8 Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{25}{3-\sqrt[4]{x}}$.

1) $[0;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$
2) $[0;\ +\infty)$
3) $[0;\ 81)\cup(81;\ +\infty)$
4) $(-\infty;\ 81)\cup(81;\ +\infty)$

A9 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(7x-21)>\log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

1) $(-\infty;\ 21)$ 2) $(3;\ 21)$ 3) $(3;+\infty)$ 4) $(21;+\infty)$

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

A10 Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1=0$.

1) $\pm\frac{4}{3}+8n,\quad n\in Z$

2) $\frac{4}{3}+8n,\quad n\in Z$

3) $\pm\frac{2}{3}+4n,\quad n\in Z$

4) $\frac{2}{3}+4n,\quad n\in Z$

Ответом к заданиям B1 – B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Решите уравнение $7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$.

B2 Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0{,}5$.

B3 Решите уравнение $x^2\sqrt{x-1}-4\sqrt{x-1}=0$.
(Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней).

ЧАСТЬ 2

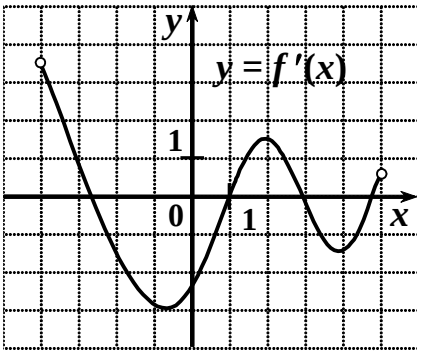
B4 Найдите значение выражения 2^x-y, если $(x;y)$ является

решением системы уравнений $\begin{cases}7\cdot 2^x+6y=2\\2^{x+1}-3y=43.\end{cases}$

B5

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-4;5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y=f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.



B6 Найдите значение выражения $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ при $x=1,2007$.

B7 Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2+\log_3|x+1|=6$.

B8 Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(1)=5$. Найдите значение выражения $3f(7)-4f(-3)$.

***B9** Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

***B10** Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BD.

***B11** Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

C1 Найдите значение функции $f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

C2 Решите уравнение $\sin 2x\cdot \operatorname{tg} x+1=3\sin x$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3 – C5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3 Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

***C4** Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

C5 Найдите количество всех решений системы уравнений
$$\begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0 \\ 2x-\dfrac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0{,}125y^2)-7. \end{cases}$$

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Ответы к заданиям демонстрационного варианта по математике.

Ответы к заданиям с выбором ответа

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
A1	**2**	*A6*	**1**
A2	**3**	*A7*	**4**
A3	**2**	*A8*	**3**
A4	**4**	*A9*	**2**
A5	**3**	*A10*	**1**

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	**3,5**
B2	**– 3**
B3	**3**
B4	**17**
B5	**3**
B6	**2**
B7	**– 10**
B8	**– 5**
B9	**1240**
B10	**4,8**
B11	**10**

Ответы к заданиям с развернутым ответом

№ задания	Ответ
C1	2
C2	$(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$
C3	(– 1; 2]
C4	1
C5	2

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ И ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в «Протокол проверки ответов на задания бланка № 2» следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «**X**», а не «0» **.**

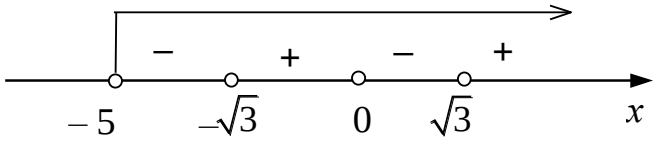
C1

Найдите значение функции $f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение:

1. Найдем область определения функции f:

$$\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{x+5}>0\\ x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0\\ x+5>0\end{cases}.$$



$x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$

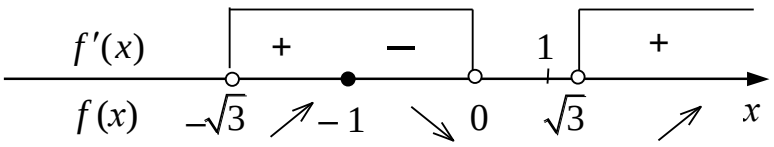
Упростим формулу, задающую функцию:

$$f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}+\lg(x+5)}=10^{\lg(x^3-3x)}=x^3-3x\ .$$

2. $f(x)=x^3-3x,\quad x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$.

$f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=3(x^2-1)$.

$f'(x)=0$ при $x=-1$ (x = 1 не принадлежит области определения функции f).



$x=-1$ - точка максимума и $f(-1)=2$

Ответ: 2.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область определения и упрощена формула, задающая функцию; 2) найдена точка максимума и значение функции в этой точке. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения, но в шаге 2 допущена одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющая на дальнейший ход решения. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2 Решите уравнение $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$

Решение:

1) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
$\sin x = 1$ или $\sin x = 0{,}5$.

а) $\sin x = 1$, тогда $\cos x = 0$, значит, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ не являются решениями исходного уравнения.

б) $\sin x = 0{,}5$, тогда $\cos x \neq 0$ и $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) уравнение сведено к равносильной системе, состоящей из квадратного уравнения относительно $\sin x$ и неравенства $\cos x \neq 0$; 2) решено уравнение и произведен отбор корней, удовлетворяющих условию $\cos x \neq 0$.[1] Все преобразования и вычисления выполнены верно, получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения, в шаге 2 допущена вычислительная ошибка или описка. В результате этой описки или ошибки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие указанным выше критериям выставления оценок в 1 или 2 балла.

С3 Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;2)$.

Решение:

1) Неравенство приводится к виду $(2x^2 - x - 3)a + (-x^2 - x) < 0$, в котором левая часть, рассматриваемая как функция от a, есть **линейная** функция $f(a) = \left(2x^2 - x - 3\right)a + \left(-x^2 - x\right)$ с коэффициентами, зависящими от x. В задаче требуется найти все значения x, при каждом из которых эта функция отрицательна для всех $a \in (1;2)$.
2) Для отрицательности линейной функции f на промежутке (1; 2) необходимо, чтобы она была отрицательна или равна нулю при каждом из двух значений $a = 1$ и $a = 2$, т.е. выполнялась система $\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0 \\ 3x^2 - 3x - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) \le 0 \\ (x-2)(x+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 2.$$

[1] Примечание. Для получения 1 балла в решении должно быть указано в любой форме, что учтено условие $\cos x \neq 0$.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

3) Для выполнения требования задачи функция f не должна равняться нулю при обоих значениях $a=1$ и $a=2$ одновременно, т. е. **не** выполняется система $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 \\ (x-2)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

4) Выполнения двух полученных условий уже достаточно для отрицательности $f(a)$ на данном промежутке. Таким образом, искомые значения x — это решения системы $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 2.$

Ответ: $(-1;2]$.

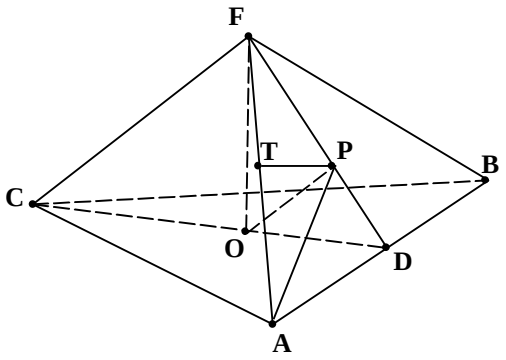
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) задача сведена к требованию отрицательности линейной функции на данном интервале; 2) получено первое необходимое условие на переменную x и решена соответствующая система; 3) получено второе необходимое условие на переменную x и решена соответствующая система; 4) имеется вывод о том, что выполнение сразу двух указанных необходимых условий уже достаточно. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность шагов 2) — 4) решения, а шаг 1) либо отсутствует, либо логически неверен. Получен верный ответ. Допустима описка, в результате которой возможен неверный ответ.
2	Верно выполнен только шаг 2) решения, а остальные шаги или отсутствуют, или сделаны с ошибкой.
1	Выполнен только шаг 2) решения, но в нем нестрогие неравенства заменены строгими. Остальные шаги решения или отсутствуют, или сделаны с ошибкой.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

***С4** Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Решение:

1) Пусть пирамида *FABC* – данная правильная пирамида, *FO* – ее высота, тогда точка *O* – центр треугольника *ABC*.



Пусть *CD* – медиана треугольника *ABC*, тогда $O \in CD$ и $CO:OD = 2:1$. Треугольник *FAB* равнобедренный и точка *D* – середина *AB*, значит, *FD* – медиана, высота и биссектриса треугольника *FAB*.

Пусть основание конуса вписано в треугольник *FAB*. Тогда центр основания конуса (точка *P*) является точкой пересечения биссектрис треугольника *FAB*. Следовательно, *OP* – высота конуса, *PD* – радиус основания, а *OD* – образующая конуса. Тогда $OP \perp FD$.

2) Пусть $PT \perp FA$. Тогда $PT=PD$ как радиусы окружности, вписанной в треугольник *FAB*. Прямоугольные треугольники *FDA* и *FTP* подобны (имеют общий угол при вершине *F*). Следовательно, $\frac{FA}{FP} = \frac{AD}{PT}$ или $\frac{FA}{AD} = \frac{FP}{PD}$, так как $PT=PD$. Отсюда $\frac{FA+AD}{AD} = \frac{FP+PD}{PD}$, т.е. $PD = \frac{AD \cdot FD}{FA+AD}$. Вычислим *PD* другим способом. Прямоугольные треугольники *FOD* и *OPD* подобны, так как имеют общий угол *D*. Поэтому $\frac{PD}{OD} = \frac{OD}{FD}$ и $PD = \frac{OD^2}{FD}$. Итак, $\frac{AD \cdot FD}{FA+AD} = \frac{OD^2}{FD}$ (1).

3) По условию $AB = 2\sqrt{7}$. Пусть $AF=b$ и $PD = r$. Из треугольника *FAD* получаем $FD = \sqrt{b^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{b^2-7}$, а из треугольника *ABC* получаем $CD = \sqrt{21}$, $OD = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\sqrt{21}$. Подставим найденные величины в равенство (1): $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{b^2-7}}{b+\sqrt{7}} = \frac{7}{3\sqrt{b^2-7}}$. Отсюда получаем: $3\left(b-\sqrt{7}\right) = \sqrt{7}$. Следовательно, $b = \frac{4\sqrt{7}}{3}$ и $r = \frac{7}{3\sqrt{b^2-7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{16 \cdot 7}{9} - 7}} = 1$.

Ответ: 1.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) установлено, что центр основания конуса – точка пересечения биссектрис боковой грани пирамиды; 2) получены два соотношения для вычисления радиуса основания конуса; 3) выполнены преобразования и вычисления, необходимые для нахождения радиуса основания конуса. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения: а) положения центра основания конуса; б) соотношения между отрезками FA, AD, FD и FP, а также между отрезками OD, PD и FD. Все преобразования и вычисления выполнены правильно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Явно описано положение центра основания конуса. Верно найдены соотношения между отрезками, необходимые для решения задачи. Допустимо отсутствие обоснований или неточности в обосновании ключевых моментов. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустима одна описка и/или негрубая ошибка в преобразованиях или вычислениях, не влияющая на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допустимо отсутствие обоснований или неточности в обоснованиях ключевых моментов решения. Верно найдены соотношения между отрезками, необходимые для решения задачи. Допустимы одна-две негрубые ошибки и/или описки в преобразованиях и/или вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
1	Общая идея и способ решения верные, но, возможно, решение не завершено. При этом верно найдено соотношение между отрезками FA, AD, FD и FP. Ключевые моменты решения не обоснованы или имеются неверные обоснования. Допустимы одна-две негрубые ошибки и/или описки в преобразованиях и/или вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

C5 Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \dfrac{10}{x\log_y 2} = 5\log_{32}(0{,}125y^2) - 7. \end{cases}$$

Решение:

1) По условию $x \neq 0$, а $y > 0,\ y \neq 1$. Тогда второе уравнение системы равносильно следующим уравнениям: $2x - \dfrac{10}{x}\cdot\log_2 y = \log_2(0{,}125y^2) - 7$,

$$2x - \frac{10}{x}\cdot\log_2 y = 2\log_2 y - 3 - 7, \qquad x - \frac{5\log_2 y}{x} = \log_2 y - 5,$$

$$x^2 + (5 - \log_2 y)x - 5\log_2 y = 0, \qquad (x+5)(x - \log_2 y) = 0.$$

Если $x = -5$, то первое уравнение системы имеет вид $y\cdot 36 - 125 = 0,\ y = 125/36 > 0$. Значит, $(-5;\ 125/36)$ – решение системы.

2) Если $x \neq -5$, то $x = \log_2 y,\ y = 2^x$ и первое уравнение системы имеет вид $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$. Если $x > 0$, то $x^3 > 0$ и $2^x(1-x)^2 + x^3 > 0$, т.е. положительных корней нет. Если $x < 0$, то $1 - x \neq 0$ и

$$2^x = -x^3\cdot(1-x)^{-2}. \qquad (*)$$

3) Рассмотрим функции $y = 2^x$ и $y = -x^3\cdot(1-x)^{-2}$.

Функция $y = 2^x$ возрастает $(2 > 1)$.

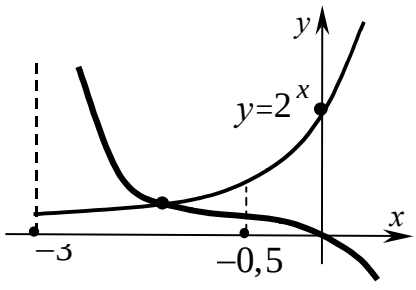
Исследуем функцию $y = -x^3\cdot(1-x)^{-2},\ x < 0$:

$$y' = -3x^2(1-x)^{-2} - x^3(-2)(1-x)^{-3}(-1) =$$

$$= -x^2(1-x)^{-3}(3(1-x) + 2x) = -x^2(1-x)^{-3}(3-x) < 0,$$

т.к. $x^2 > 0,\ 3 - x > 0,\ (1-x)^{-3} > 0$. Значит, эта функция убывает при $x < 0$.

4) Если $x = -3$, то $2^x < 1 < -x^3\cdot(1-x)^{-2}$. Если же $x = -0{,}5$, то $2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $-x^3\cdot(1-x)^{-2} = \dfrac{1}{8} : \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{18}$ и $2^x > -x^3\cdot(1-x)^{-2}$.Так как обе функции изменяются непрерывно, то имеется единственный корень x_0 уравнения (*), $-3 < x_0 < -0{,}5;\ x_0 \neq -5$. Поэтому исходная система имеет ровно два решения $(x_0;\ 2^{x_0})$ и $(-5;\ 125/36)$.



Ответ: 2.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование второго уравнения системы к виду $(x+5)(x-\log_2 y)=0$; нахождение решения $(-5;\,125/36)$ системы; 2) сведение системы к уравнению относительно x; проверка того, что при $x>0$ оно не имеет корней; 3) сравнение характера монотонности обеих частей уравнения (*); 4) проверка того, что уравнение (*) имеет хотя бы один корень. Обоснованы все моменты решения: а) приведена ОДЗ данной системы уравнений; б) в шаге 1) есть ссылка (словесная или знаком $\Leftrightarrow$) на равносильность; в) в шаге 2) есть явная ссылка на положительность $2^x(1-x)^2+x^3$ при $x>0$; г) в шаге 4) указаны значения аргумента, в которых левая часть уравнения (*) больше (меньше) его правой части; д) наличие корня обосновано или эскизами графиков, или же явной словесной ссылкой на непрерывность. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность шагов 1) – 4) решения. Обоснованы ключевые моменты а), б), в). Допустимо отсутствие обоснований ключевых моментов г) и д). Допустима 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 4).
2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Верно выполнены шаги 1) и 2) решения: составлено уравнение (*). Допускается отсутствие одного из шагов 3) или 4) при частичном выполнении другого шага решения. Обоснованы ключевые моменты б) и в). Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено. Допустимы $1-2$ негрубые ошибки в вычислениях или построениях графиков, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено. Верно выполнен шаг 1) решения: найдено решение $(-5;\,125/36)$ системы. В шаге 2) уравнение $2^x(1-x)^2+x^3=0$ относительно x составлено, но его исследование не завершено. Обоснован ключевой момент б). Допустимо, что решение не завершено, а обоснования других ключевых моментов отсутствуют.

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

	Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Примечание

Данное программное обеспечение можно скачать из интернета по указанным адресам.

Сайт программы	http://www.dessci.com/en/
Прямой линк (30 дней бесплатно)	http://www.dessci.com/en/dl/MathType52Setup.exe

© 2007 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации