Внимание! Для правильной распечатки файла демонстрационного варианта КИМ по математике необходимо установить на компьютере программное обеспечение MathType версии не ниже 5.0 (см. Примечание в конце файла).

«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель Федеральной службы
по надзору в сфере образования и науки

В.А. Болотов

« 24 » ноября 2004г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант 2005 г.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы дается 4 часа (240 мин). В работе 26 заданий. Они распределены на 3 части.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 – А10 и В1 – В3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. К каждому заданию А1 – А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 – В11, С1, С2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям В4 – В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два – алгебраических (С3, С5) и одно – геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (В9, В10, В11, С4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "x" в клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1 Вычислите: $-15\cdot 81^{\frac{1}{4}}-19$.

1) – 154 2) 116 3) – 64 4) 26

A2 Упростите выражение $\sqrt[3]{25b^2}\cdot\sqrt[3]{5b^4}$.

1) $5b^2$ 2) $25b$ 3) $\sqrt[3]{5b^2}$ 4) $5b$

A3 Найдите значение выражения $\log_5 b$, если $\log_5 b^3=9$.

1) 27 2) 6 3) 3 4) 12

A4 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

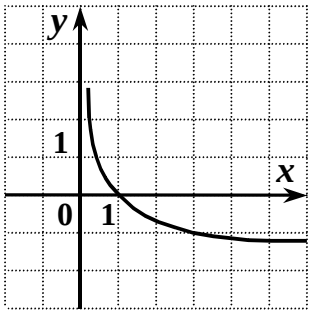
1) 0,5 2) 2 3) – 0,5 4) – 2

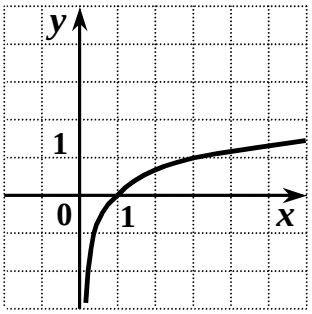
A5

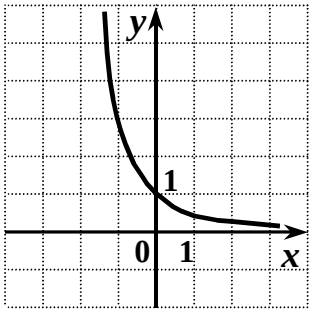
© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

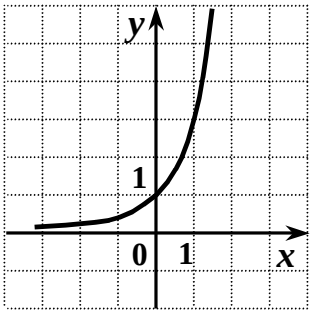
На одном из рисунков изображен график функции $y = \log_3 x$.

Укажите этот рисунок.

1) 

2) 

3) 

4) 

A6 Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$.

1) $y' = xe^{x-1} + 6x$

2) $y' = e^x + x^3$

3) $y' = e^x + 5x^2$

4) $y' = e^x + 6x$

A7 Какое из следующих чисел входит в множество значений функции $y = 2^x + 4$?

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

A8 Решите неравенство $\dfrac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \geq 0$.

1) $\left[-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$ 2) $(-\infty; -4) \cup \left[-\dfrac{3}{4}; 2\right]$

3) $\left(-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$ 4) $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$

A9 Решите уравнение $\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

1) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

2) $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

3) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

4) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

A10 Укажите область определения функции $y = \sqrt{3 - \lg x}$.

1) (0; 3] 2) (0; 1000] 3) (3; 1000] 4) [1000; $+\infty$)

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Ответом на задания B1 – B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Решите уравнение $3^{4x+5} = 81$.

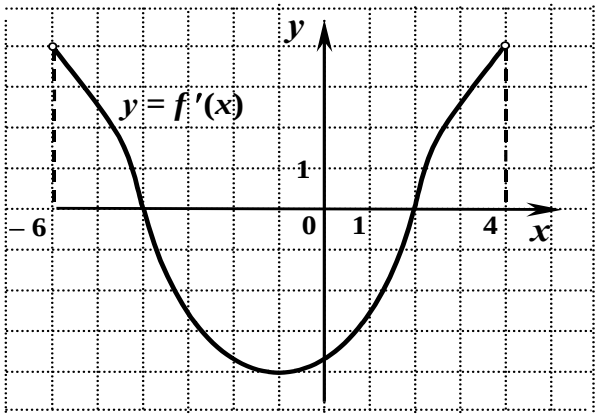
B2 Решите уравнение $x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3$.

B3 Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = t^2 + t + 2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 5?

ЧАСТЬ 2

B4 Вычислите: $6 \cdot \log_2 125 \cdot \log_5 2 + 2^{\lg 7} \cdot 5^{\lg 7}$.

B5 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 4)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на этом промежутке.



B6 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$; $x = 1$; $x = 4$ и $y = 0$.

B7 Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{(x-7{,}5)^4}$ при $x = \sqrt{10}$.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

B8 Найдите наибольшее целое значение функции $y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$.

***B9** Торговая база закупила у изготовителя партию альбомов и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30% больше цены изготовителя. Магазин установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 р.?

***B10** Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен 45º. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.

***B11** В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если AC = $3\sqrt{2}$, BC = 10, ∠MAC = 45°.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1 Решите уравнение $|\sin x| = \sin x \cdot \cos x$.

C2 Найдите нули функции $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$.

ЧАСТЬ 3

Для записи ответов на задания (C3 – C5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3 Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22, \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x}. \end{cases}$$

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

***C4** Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 – боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что AB = 12, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

C5 Известно, что уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Ответы к заданиям демонстрационного варианта по математике.

Ответы к заданиям с выбором ответа

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
A1	**3**	*A6*	**4**
A2	**1**	*A7*	**1**
A3	**3**	*A8*	**3**
A4	**4**	*A9*	**2**
A5	**2**	*A10*	**2**

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	**– 0,25**
B2	**4**
B3	**2**
B4	**25**
B5	**2**
B6	**24**
B7	**4,5**
B8	**8**
B9	**20,2**
B10	**24**
B11	**21**

Ответы к заданиям с развернутым ответом

№ задания	Ответ
C1	$\pi n,\ n \in Z$
C2	-2
C3	$(2,4;\ -7)$
C4	$324\sqrt{3}$
C5	$-1,5;\ -1$

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Инструкция по оценке работ учащихся по математике

Первые 10 заданий А1–А10 – с выбором ответа из 4 предложенных вариантов, следующие 11 заданий В1–В11 – с кратким ответом в виде целого числа или числа, записанного в виде десятичной дроби.

Задание с выбором ответа (А1–А10) считается выполненным верно, если указан номер, которым обозначен верный ответ. Задание с кратким ответом (В1–В11) считается выполненным верно, если указано число, которое является верным ответом на данное задание. За верное выполнение заданий с выбором ответа и с кратким ответом выставляется 1 балл.

В работу включены 5 заданий с развернутым ответом С1 – С5, при выполнении которых требуется записать полное решение. Эти задания существенно различаются по уровню сложности. Два первых задания (С1 и С2) – повышенного уровня сложности, остальные три (С3 – С5) – высокого уровня сложности. Выполнение этих заданий оценивается экспертами. В зависимости от полноты и правильности ответа за выполнение заданий С1 и С2 выставляется от 0 до 2 баллов, за выполнение заданий С3 – С5 – от 0 до 4 баллов.

Критерии оценки выполнения заданий повышенного уровня (С1 и С2) отличаются от критериев оценки заданий высокого уровня сложности. Они не требуют от учащихся обосновывать приведенные ими решения. Это объясняется тем, что задачи С1 и С2 не являются совершенно новыми для учащихся, как это характерно для более сложных заданий С3 – С5. При решении задач С1 и С2 нужно, например, выделить несколько случаев, подлежащих рассмотрению (см. далее задание С1), или выбрать правильный порядок соответствующих преобразований и вычислений (см. задание С2). При этом в каждом из этих случаев надо применить стандартный способ решения, процедура которого достаточно отработана и, по-нашему мнению, не нуждается в приведении обоснований. Поэтому конкретизированные критерии оценки выполнения этих заданий фиксируют только правильность выделенных шагов решения, но не включают требования к их обоснованию.

Далее для каждой задачи С1 – С5 приводится один из возможных вариантов решения, который может быть представлен в работах учащихся, и даются рекомендации по оценке ответов учащихся, выбравших приведенный способ решения.

Подчеркнем, что приведенные записи решений не являются эталонами выполнения работы, которым обязаны следовать учащиеся.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

ЗАДАНИЕ С1

Решите уравнение $|\sin x| = \sin x \cdot \cos x$.

Решение:

1) Пусть $\sin x \geq 0$, тогда

$$\sin x - \sin x \cdot \cos x = 0,\ \sin x(1 - \cos x) = 0, \qquad \sin x = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \cos x = 0,$$
$$x = \pi n, n \in Z \quad \text{или} \quad x = 2\pi n, n \in Z.$$

Отсюда $x = \pi n, n \in Z$.

2) Пусть $\sin x < 0$, тогда
$\sin x + \sin x \cdot \cos x = 0;\ \sin x(1 + \cos x) = 0;\ 1 + \cos x = 0;\ \cos x = -1$,
тогда $\sin x = 0$, что противоречит рассматриваемому случаю $\sin x < 0$.

Ответ: $\pi n, n \in Z$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) рассмотрение случая $\sin x \geq 0$ и решение соответствующего уравнения, 2) рассмотрение случая $\sin x < 0$ и решение соответствующего уравнения. Все тождественные преобразования выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность выделенных шагов решения. При решении одного из уравнений допущена одна описка или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой описки или ошибки возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

ЗАДАНИЕ С2

Найдите нули функции $y = \ln^2(x - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$.

Решение:

1) Нули функции – это значения x, при которых $y = 0$.
$\ln^2\left(x^2 - 3x - 9\right) \geq 0$ и $\sqrt{x^3 - 8x - 8} \geq 0$, значит, их сумма равна 0, если каждое слагаемое обращается в нуль.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

2) $\begin{cases} \ln\left(x^2 - 3x - 9\right) = 0, \\ x^3 - 8x - 8 = 0 . \end{cases}$

3) $\ln\left(x^2 - 3x - 9\right) = 0$ Ы $x^2 - 3x - 9 = 1$ Ы $x^2 - 3x - 10 = 0$;

$x_1 = -2,\ x_2 = 5.$

4) Проверим, являются ли числа – 2 и 5 корнями второго уравнения системы:

$(-2)^3 - 8$Ч$(-2) - 8 = 0$, *верное равенство,* значит, – 2 – корень;

$5^3 - 8$Ч$5 - 8$№0, значит, 5 – не является корнем 2-го уравнения.

Ответ: – 2.

Замечания

1. В записи решения возможно отсутствие знака равносильности.
2. Возможны разные способы решения, например, можно решить оба уравнения, а затем сравнить корни.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) оценивание значений выражений, входящих в формулу, задающую функцию; 2) получение системы двух уравнений; 3) решение одного уравнения; 4) проверяется, являются ли найденные корни уравнения решением системы. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность 2 – 4 выделенных шагов решения. Допускается отсутствие шага 1 решения и/или при решении уравнения допущена одна описка или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

ЗАДАНИЕ С3

Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{-y + 10x + 11}{-2y - 5x} = -5y - 15x + 22, \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26\text{Ч}5^{-2y}\text{Ч}5^{-5x}. \end{cases}$

Решение:

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

1) Решим уравнение $25^{-2y-5x}+25=26\cdot 5^{-2y}\cdot 5^{-5x}$:

$$\left(5^{-2y-5x}\right)^2-26\cdot 5^{-2y-5x}+25=0.$$

Пусть $t=5^{-2y-5x}$. Тогда уравнение примет вид $t^2-26t+25=0$, значит, $t_1=1$; $t_2=25$.

2) Если $t=1$, то $5^{-2y-5x}=5^0$, $-2y-5x=0$. Но, $-2y-5x$ – знаменатель первого уравнения, следовательно, равенство нулю невозможно.

Если $t=25$, то $5^{-2y-5x}=5^2$, $-2y-5x=2$, $y=-\dfrac{2+5x}{2}$.

3) Подставим $y=-\dfrac{2+5x}{2}$ в первое уравнение системы. Получим:

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{2+5x}{2}+10x+11}{2}=5\cdot\dfrac{2+5x}{2}-15x+22,\\ y=-\dfrac{2+5x}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{25x+24}{4}=\dfrac{-5x+54}{2},\\ y=-\dfrac{2+5x}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}35x=84,\\ y=-\dfrac{2+5x}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2,4,\\ y=-7.\end{cases}$$

Так как преобразования равносильные, то проверку подстановкой можно не проводить.

Ответ: $(2,4;\ -7)$.

Замечания

1) Проверку подстановкой при наличии ссылки на равносильность преобразований не следует считать недочетом.
2) Возможно решение и без введения новой переменной.
3) При решении квадратного уравнения запись дискриминанта и формулы корней квадратного уравнения не обязательна.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

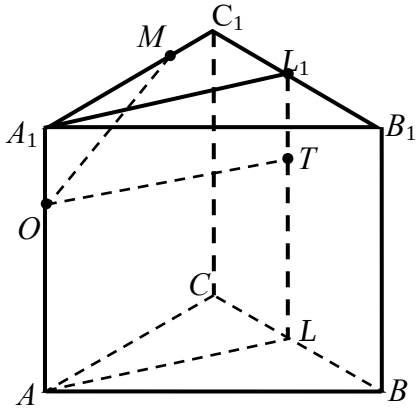
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) сведение второго уравнения системы к квадратному уравнению относительно t и его решение; 2) проверка «пригодности» корня $t = 1$, выражение y через x в случае $t = 25$; 3) решение системы, в котором приведены необходимые преобразования. Обоснованы моменты решения: а) в п.2 имеется ссылка на знаменатель первого уравнения; б) в п.3 имеется ссылка на равносильность преобразований (словесная или с помощью знака Ы). Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснован ключевой момент а). Допустима описка, в результате которой может быть получен неверный ответ (например, в записи самого ответа пропущен минус).
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения. При этом получено и верно решено уравнение $t^2 - 26t + 25 = 0$, значение $t = 1$ исключено. Обоснован ключевой момент а). Допустимы 1 – 2 негрубые ошибки или описки в вычислениях в шаге 3, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено: получено и верно решено уравнение $t^2 - 26t + 25 = 0$. Допускается, что значение $t = 1$ не исключено, а в случае t =25 составлена правильная система уравнений, но ее решение не завершено. Обоснования ключевых моментов отсутствуют. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

ЗАДАНИЕ С4

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 – боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что AB = 12, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение:



1) Так как призма правильная, то прямая $AA_1 \perp ABC$. По условию центр O сферы лежит на ребре AA_1 и поэтому, по свойству плоскости, касательной к сфере, сфера с центром в точке O касается плоскости ABC в точке A. Значит, OA – радиус сферы.
2) Пусть L и L_1 – середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Так как треугольник ABC – правильный, то $AL \wedge BC$. А так как $AA_1 \wedge BC$, то $BC \wedge AA_1L$, т.е. плоскости CBB_1 и ALL_1 перпендикулярны. Пусть T – точка касания сферы с плоскостью CBB_1. Тогда OT – радиус сферы, $OT \wedge CBB_1$, значит, OT лежит в плоскости ALL_1. Тогда $OT \parallel AL$, а так как $AA_1 \parallel LL_1$, то $OT = AL$. Отсюда $OT = OA = AL = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ как высота правильного треугольника, со стороной 12.
3) Точка M лежит на сфере. Поэтому $OM = OT = 6\sqrt{3}$. По условию $MA_1 = \frac{3}{4}AB$. Тогда $MA_1 = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$. Из прямоугольного треугольника OMA_1 находим $OA_1 = \sqrt{OM^2 - MA_1^2} = \sqrt{108 - 81} = 3\sqrt{3}$. Отсюда находим высоту призмы: $h = AO + OA_1 = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.
4) Площадь S боковой поверхности призмы найдем по формуле $S = 3AB \cdot h$. Отсюда $S = 3 \cdot 12 \cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}$.

Ответ: $324\sqrt{3}$.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Решение, оцениваемое 3 баллами

1) A – точка касания сферы с плоскостью ABC, $OA = R$ – радиус сферы.
2) Пусть $OT \wedge CBB_1$. Тогда OT – радиус сферы, и $OT = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
3) $MA_1 = \dfrac{3}{4}AB = \dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

   $OA_1 = \sqrt{OM^2 - MA_1^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 9^2} = 3\sqrt{3}$. Отсюда высота призмы $h = 9\sqrt{3}$.
4) Площадь S боковой поверхности призмы найдем по формуле $S = 3AB \cdot h$. Отсюда $S = 3 \cdot 12 \cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}$.

Решение, оцениваемое 2 баллами

1) Точка O – центр, а T – точка касания сферы с CBB_1 и
2) $OT = OA = AL = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
3) $MA_1 = \dfrac{3}{4}AB = \dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9$;

   $OA_1 = \sqrt{OM^2 - MA_1^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 9^2} = 3\sqrt{21}$.*

   $h = AO + OA_1 = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{21}$.
4) Площадь S боковой поверхности призмы найдем по формуле $S = 3AB \cdot h$. Отсюда $S = 3 \cdot 12 \cdot (6\sqrt{3} + 3\sqrt{21}) = 36(6\sqrt{3} + 3\sqrt{21})$.

* Допущена негрубая ошибка в вычислениях.

Замечание

Считается недочетом, если точные значения искомых величин заменены приближенными, например, записано, что $OT \approx 10{,}4$.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) установлено положение точки касания сферы с плоскостью основания; 2) установлено положение точки касания сферы с боковой гранью; 3) найдено соотношение между ребром основания призмы и радиусом сферы; 4) найдена высота призмы; 5) вычислена площадь боковой поверхности призмы. Использованы верные формулы при нахождении искомых величин. Верно обоснованы все ключевые моменты решения: а) положение точки касания сферы с плоскостью основания; б) положение точки касания с боковой гранью. Проведены верные вычисления. Получен верный ответ.
3	Имеются все шаги 1) – 4) решения. Использованы верные формулы. Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а), б) решения. Допустимо отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях[1], но не грубые ошибки. Допустима описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.
2	Имеются шаги 2) – 4) решения. Использованы верные формулы. Утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения, либо оба отсутствуют, либо приведено только одно из них. Но сами ключевые моменты использованы в решении. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустима описка и/или негрубая ошибка в вычислениях или рассуждениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено. Верно найдено соотношение между радиусом сферы и ребром основания призмы, то есть в вычислениях и рассуждениях верно использовано положение центра сферы. Допустимо отсутствие обоснований или неточности в обоснованиях. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или рассуждениях, не влияющие на правильность хода решения.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют выше указанным критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.

[1] Неточностью в обоснованиях являются замена свойства на определение или признак или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

ЗАДАНИЕ С5

Известно, что уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p, при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Решение:

1) Если $2p+3=0$, $p=-1{,}5$, то первое уравнение – линейное: $1{,}5x+1=0$. У него один корень $x=-2/3$.
2) Если $2p+3$ №0, то первое уравнение – квадратное. Найдем его дискриминант:

$D=(p+3)^2-4(2p+3)=p^2-2p-3=(p-3)(p+1)$. Если $-1<p<3$, то $D<0$.

Значит, уравнение имеет корни только при p О$(-$ Ґ $;-1]$ И$[3;+$ Ґ $)$. Причем, при $p=-1$ и $p=3$ – корень один, а при p О$(-$ Ґ $;-1)$ И$(3;+$ Ґ $)$ – два корня.

3) Пусть $t=\sqrt{x-3}$, $x=t^2+3$. Тогда при p №21 второе уравнение примет вид

$(t+3)(2(t^2+3)+1)=21-p$, $2t^3+6t^2+7t+p=0$. Исследуем функцию $y(t)=2t^3+6t^2+7t+p$. Найдем производную $y'=6t^2+12t+7$.

4) Так как $y'=6(t+1)^2+1>0$, то $y=y(t)$ возрастает на всей числовой прямой $(-$ Ґ $;+$ Ґ $)$. Поэтому уравнение $y(t)=0$ или не имеет корней, или имеет только один корень. Первый случай невозможен по условию задачи. Значит, (см. 1) и 2)) или $p=-1$, или $p=3$, или $p=-1{,}5$.
5) Если $p=3$, то получаем уравнение $2t^3+6t^2+7t+3=0$. По условию $t=\sqrt{x-3}$ і 0, и так как $y=y(t)$ возрастает, то $y(t)$ і $y(0)=3$. Значит, неотрицательных корней у уравнения $2t^3+6t^2+7t+3=0$ нет.

Если $p=-1$, то получаем уравнение $2t^3+6t^2+7t-1=0$. Так как $y(0)=-1<0$, $y(1)=14>0$ и функция $y=2t^3+6t^2+7t-1$ непрерывна, то уравнение $2t^3+6t^2+7t-1=0$ имеет корень на промежутке $(0;1)$.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

Если $p = -1{,}5$, то получаем уравнение $2t^3 + 6t^2 + 7t - 1{,}5 = 0$. Так как $y(0) = -1{,}5 < 0$, то так же, как и в случае $p = -1$, уравнение имеет корень на промежутке $(0; 1)$.

Ответ: $-1{,}5$; -1.

Замечание.

В шагах 4) и 5) допустима ссылка (без доказательства) на наличие у кубической функции хотя бы одного корня.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) разбор случая $2p + 3 = 0$, нахождение числа корней; 2) разбор случая $2p + 3 \neq 0$, нахождение числа корней полученного квадратного уравнения; 3) замена переменной $t = \sqrt{x - 3} \geqslant 0$ во втором уравнении, составление соответствующей функции $y = y(t)$, вычисление производной; 4) исследование функции $y = y(t)$ на монотонность, отбор значений параметра $p = -1$ или $p = 3$; 5) нахождение числа корней второго уравнения при отобранных значениях p. Обоснованы все моменты решения: а) в шаге 3) имеется ссылка на неравенство $p \geqslant 21$; б) в шаге 4) при определении знака производной есть ссылка на выделение полного квадрата (или отрицательность дискриминанта); в) в шаге 4) при определении числа корней есть ссылка на монотонность; г) в шаге 5) имеется ссылка на условие $t \geqslant 0$; д) в шаге 5) имеется ссылка на непрерывность $y = y(t)$. Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допускается, что в шаге 2) после равенства $D = (p - 3)(p + 1)$ вместо словесного обоснования применен метод интервалов. В шаге 5) допустима лишь краткая ссылка на то, что при $p = -1{,}5$ решение аналогично рассмотренному в случае $p = -1$. Обоснованы ключевые моменты б), в), г). Допустима 1 описка, и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 5), в результате которых может быть получен неверный ответ.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации

2	Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Выполнены шаги 2) – 5) решения. Обоснованы ключевые моменты б) и г). Допускается отсутствие шага 1), Допустимы 1 – 2 негрубые ошибки или описки в вычислениях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения, в результате чего может быть получен неверный ответ.
1	Общая идея, ход решения верны, но решение, возможно, не завершено. Полностью выполнены шаги 2) и 3) решения и верно определен знак производной (часть шага 4). Допустимо, что отбор значений $p = -1$, или $p = 3$, или $p = -1{,}5$ не произведен. Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено. Допустимы негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях. В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.

Примечание

Данное программное обеспечение можно скачать из интернета по указанным адресам.

Сайт программы	http://www.dessci.com/en/
Прямой линк (30 дней бесплатно)	http://www.dessci.com/en/dl/MathType52Setup.exe

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации